仕入価格と販売価格を考慮した経済的発注量分析

逯　建国

キーワード：仕入価格、販売価格、卸売業者、数量割引、経済的発注量

1. はじめに

卸売は、製造業(メーカー)から商品を仕入れ、あるいは市場から商品を買い付け、小売業者に商品を販売する業態である。メーカーが大量取引や長期間取引を獲得するために数量割引[1]を導入している場合、仕入コストを削減しようとする卸売業者は、目の前の数量割引制度に誘惑されると、市場の需要量より多く仕入れてしまうことになる。すると、売れない商品の在庫量が増加するため、在庫管理費が増加する。元々利益率の低い卸売としては、販売価格の設定、数量割引を考慮した仕入数量、及び在庫費用のバランスを取ることが必要となる。

在庫管理における EOQ モデル(経済的発注量モデル)は、単位時間あたりの需要が一定の場合に、発注費と在庫保管費の合計を最小にする発注量を求める。本論文では、EOQ モデルの拡張として、卸売業者における、仕入価格と販売価格を考慮したモデルを考察する。需要量は需要関数によって決まるものとし、仕入価格は数量割引がある。利益を最大にすることを目的とし、最適解は Excel を用いて求めた。この計算によって需要関数、数量割引が販売価格や経済的発注量にどのように影響を与えるか調べる。

本論文の構成は次の通りである。第 2 節では在庫管理の基礎理論である EOQ モデルを紹介する。第 3 節で提案モデルの概要を示す。そして、第 4 節で数値例の計算結果

[1]取引数量あるいは取引金額に応じて価格を割引く制度を数量割引制度という。数量割引は販売促進は販売促進の 1 つの方法としてメーカーに採用されている。

を与え、第5節と第6節では需要関数を変えた場合の結果を示す。第7節は考察を行う。

2.EOQ モデル

本節では在庫管理の基礎理論である EOQ モデルを紹介する。このモデルでは、単位時間あたりの需要が一定であることを仮定し、これをdとする。また、毎回の発注量は一定であるとし、これをQとする。在庫の欠品を許さず、在庫量が 0 になった時点で納入される。また初期在庫Qとする。このとき、在庫量の推移は図1のようになる。

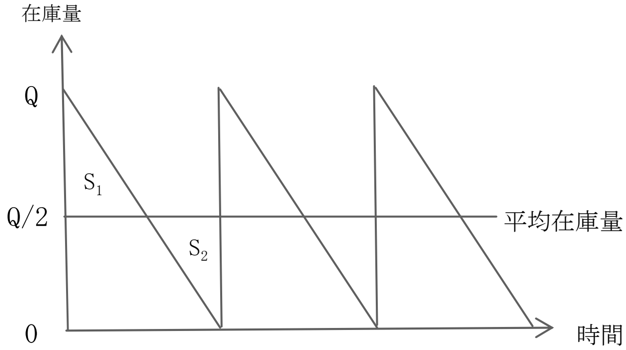

図1　在庫量の時間的変化

図1でS_1とS_2の面積が同じであるため、平均在庫量は$Q/2$であることがわかる。

商品1単位の単位時間あたりの保管費をh、一回あたりの発注費をkとする。そして、単位時間あたりの在庫管理費$f(Q)$を、単位時間あたりの保管費と単位時間あたりの発注費の合計とする。このとき$f(Q)$を最小にする発注量Qを経済的発注量(EOQ：Economic Order Quantity)という。

単位時間あたりの保管費は$\frac{hQ}{2}$であり、発注費は$\frac{kd}{Q}$である。よって、

$$f(Q) = \frac{hQ}{2} + \frac{kd}{Q} \tag{1}$$

である。

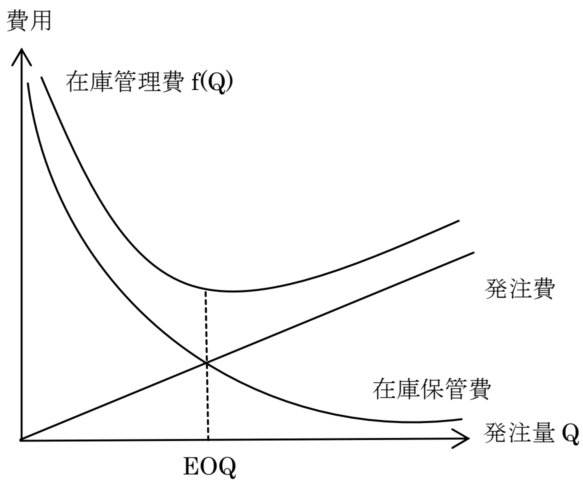

図 2　在庫管理費関数 $f(Q)$ の概形

図 2 は $f(Q)$ の概形を表している。$f(Q)$ は下に凸の関数であるため、$f(Q)$ を Q で微分した $f'(Q)$ が 0 となる Q^* が EOQ となり、

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h}} \tag{2}$$

で与えられる。その時の在庫管理費は

$$f(Q^*) = \frac{hQ^*}{2} + \frac{kd}{Q^*} = \sqrt{2khd} \tag{3}$$

となる。

3. 仕入価格と販売価格を考慮した EOQ モデル

本論文では、図 3 における卸売業者の在庫管理モデルを考える。特に、メーカーからの仕入と顧客への販売を考慮し、利益を最大にすることを目的とする。

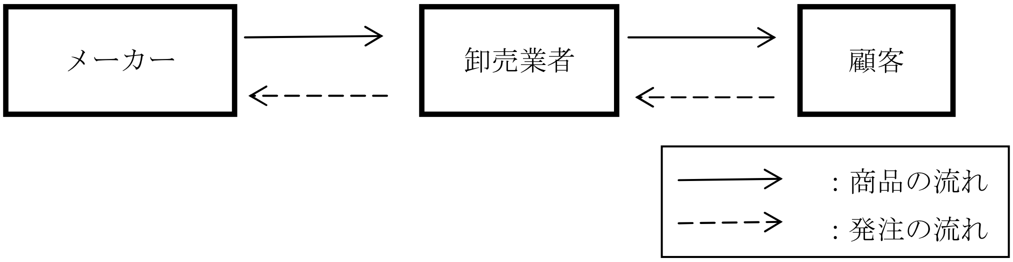

図 3　モデルの概念図

顧客への販売価格を$P_{販}$、メーカーからの仕入価格を$P_{仕}$とする。単位時間あたりの需要は一定であるが、定数の場合(モデル 1)と$P_{販}$に依存する場合(モデル 2, 3)を考える。また、$P_{仕}$は定数の場合(モデル 1, 2)と数量割引をする場合(モデル 3)を考える。

3.1　モデル 1

単位時間あたりの需要が一定であることを仮定し、前節同様dとする。このとき単位時間あたりの収益は$dP_{販}$となる。一方、費用については、仕入費が$dP_{仕}$であり、在庫管理費は EOQ モデルに基づき$\sqrt{2khd}$が最小である。従って、単位時間あたりの利益Fは

$$F = dP_{販} - dP_{仕} - \sqrt{2khd} \tag{4}$$

で与えられる。(4)式の右辺は定数であり、発注量は(2)式で与えられる。

3.2　モデル 2

ある商品の市場における販売価格と需要量の関係を示した関数を需要関数という。通常、販売価格が上昇すると需要量は減少し、一方、販売価格を下げると需要量が増加する。そこで、需要関数は非増加関数とする。

需要関数を考える場合、単位時間あたりの利益は$F(P_{販})$になり、その値は(4)式のdを$D(P_{販})$に置き換えればよい。特に、EOQ は$Q^* = \sqrt{\dfrac{2kD(P_{販})}{h}}$、在庫管理費は$f(Q^*) = \sqrt{2khD(P_{販})}$となり、単位時間あたりの利益$F(P_{販})$は

$$F(P_{販}) = D(P_{販})P_{販} - D(P_{販})P_{仕} - \sqrt{2khD(P_{販})} \tag{5}$$

となる。

3.3　モデル３

モデル３では、更に仕入価格 $P_{仕}$ に数量割引がある場合を考える。

一般に数量割引には増分割引と総量割引がある[2]。増分割引では、ある一定数量を超えると、超えた分だけ１単位あたりの購入費用が割引される。一方、総量割引では、ある一定数量を超えると、購入する全ての量に対して割引が適用される。本論文では総量割引を扱う。ここで、仕入価格が変わる数量を仕入価格分岐点とよび、θ_1, θ_2, . . . と表す。このとき、仕入価格関数は発注量(購入量)に対する階段関数となる(表１、図4)。

表１　総量割引テーブル

発注量（Q）	仕入価格（$P_{仕}(Q)$）
$0 \le Q \le \theta_1$	$P_{仕1}$
$\theta_1 < Q \le \theta_2$	$P_{仕2}$
$\theta_2 < Q \le \theta_3$	$P_{仕3}$
⋮	⋮

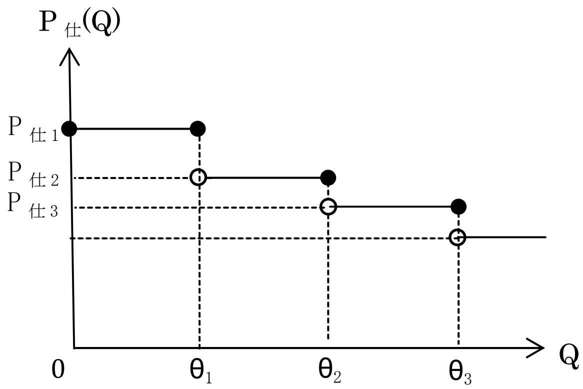

図４　総量割引を考慮した仕入価格関数

[2]久保（2007）87 頁-93 頁

発注量 Q が仕入価格に影響するため、単位時間あたりの利益 $F(P_{販}, Q)$ は

$$F(P_{販}, Q) = D(P_{販})P_{販} - D(P_{販})\, P_{仕}(Q) - \left(\frac{hQ}{2} + \frac{kD(P_{販})}{Q}\right) \qquad (6)$$

となる。

4.　数値例 1

4.1　問題

本節では、次の例を考える[3]。卸売業者はビタミン薬品のネット販売会社であり、ビタミン剤を仕入れ、販売している。商品一個あたりの年間保管費（h）は 0.2 ドルであり、一回あたりの発注費（k）は 100 ドルである。需要関数を $D(P_{販}) = 300000 - 60000P_{販}$ とする。また、仕入価格は表 2 の通りである。

表 2　仕入価格（総量割引テーブル）

発注量（Q）	仕入価格（$P_{仕}(Q)$）
$0 \le Q \le 5000$	＄3.00
$5000 < Q \le 10000$	＄2.96
$10000 < Q$	＄2.92

以上の情報をまとめると表 3 となる。

表 3　数値例データ

$P_{仕1}$	3.00
$P_{仕2}$	2.96
$P_{仕3}$	2.92
θ_1	5000
θ_2	10000
h	0.2
k	100
$D(P_{販})$	$300000 - 60000\, P_{販}$

[3]Sunil Chopra and Peter Meindl 著、李麗萍 訳（2003）145 頁-185 頁

モデル1では$P_{販}=3$ドル、$d=D(P_{販})=120000$、$P_{仕}=3$ドルとする。モデル2においても$P_{仕}=3$ドルとする。

4.2　計算方法、結果及び考察

計算方法は次の通りである。モデル1ではデータを(4)式に代入するだけでよい。EOQは(2)式で求められる。モデル2ではExcelを用いた。$P_{販}=5$のとき$D(P_{販})=0$となることを考慮し、$P_{販}$を0.01刻みに2.00から4.99まで(5)式に代入し、$F(P_{販})$を最大にする$P_{販}$を求める。モデル3においてもExcelを用いて、Qを50刻みに50から12000まで、$P_{販}$を0.01刻みに0.01から4.99まで(6)式に代入し、$F(P_{販},Q)$を最大にする$P_{販}$とQを求める。

表4は計算結果である。モデル1では$P_{販}=3$，$P_{仕}=3$としていたため、(4)式は必ず負の値になる。しかし、(6)式に$P_{販}=3$，$Q^*=10954.45$を代入すると、総量割引があるため$F(P_{販},Q^*)$の値は正になった。モデル2では$P_{仕}=3$に固定して計算したため、(5)式を最大にする$P_{販}$は大きいものになった。モデル3は総量割引も考慮に入れており、その結果、販売価格$P_{販}$が小さくなると同時に仕入価格$P_{仕}$も小さくなった。このように、モデル3を考慮することで$P_{販}$を極力抑える効果があることが示唆される。$P_{販}$が小さいと需要$D(P_{販})$が大きくなる。よって，モデル2よりもモデル3の方がQ^*は大きい値となった。

表4　計算結果

	モデル1	モデル2	モデル3
$P_{販}$	3.00(固定)	4.01	3.96
$D(P_{販})$	120000.00	59400.00	62400.00
Q^*	10954.45	7707.14	10050.00
$P_{仕}(Q^*)$	2.92	2.96	2.92
$F(P_{販},Q^*)$	7409.11	60828.57	63270.10

図5と6は関数$F(P_{販},Q)$の概形を示している。$F(P_{販},Q)$を最大にする$P_{販}$，Qは$P_{販}=3.96$，$Q=10050$である(表4)。

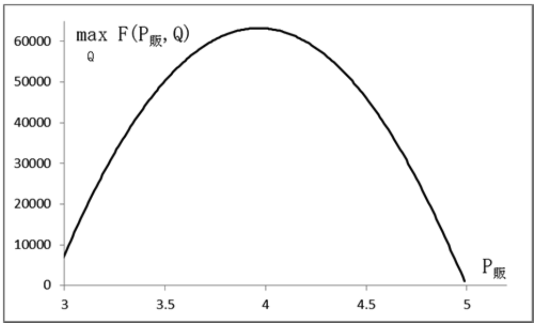

図 5 $\max_{Q} F(P_{販}, Q)$ の概形

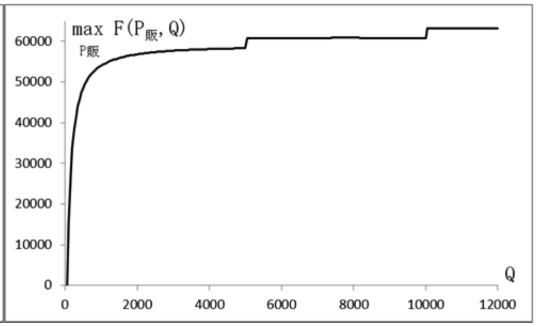

図 6 $\max_{P_{販}} F(P_{販}, Q)$ の概形

モデル 3 において，Q を EOQ の公式 $Q^* = \sqrt{\dfrac{2kD(P_{販})}{h}}$ によって計算することが考えられる。これをモデル 3(EOQ) とよび、この場合 $F(P_{販}) = F(P_{販}, Q^*)$ を最大にする $P_{販}$ を求めることになる。このモデルは、モデル 2 とモデル 3 の中間にあるといえる。表 5 は、これら 3 つのモデルの計算結果である。$P_{販}$ の値はモデルを一般化するほど小さくなるものの大きい差は見られないが、Q の値が大きく変わり、利益もモデル 3(EOQ) はモデル 3 の 96.2%であった。このように、モデル 3 において EOQ モデルは必ずしも良い結果を与えるとは限らないことがわかる。

表 5　モデル 3(EOQ) の計算結果

	モデル 2	モデル 3(EOQ)	モデル 3
$P_{販}$	4.01	3.99	3.96
$D(P_{販})$	59400.00	60600.00	62400.00
Q^*	7707.14	7784.60	10050.00
$P_{仕}(Q^*)$	3.00	2.96	2.92
$F(P_{販}, Q^*)$	58452.57	60861.08	63270.10

図 7 は、関数 $F(P_{販})$ の概形を示している。モデル 3 は $\max_{Q} F(P_{販}, Q)$ を表示している。

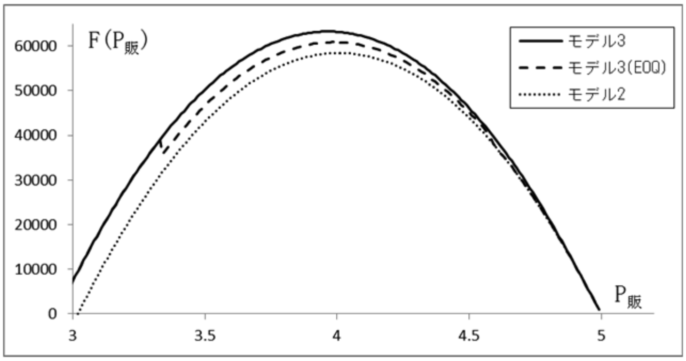

図 7　$F(P_{販})$ の概形

5.　数値例 2

本節では、需要関数 $D(P_{販})$ を

$$D(P_{販}) = \frac{a}{P_{販} - b} + c \tag{7}$$

にした場合の結果を示す。

数値例 1 の需要関数 $D(P_{販}) = 300000 - 60000P_{販}$ を参考に、点(0, 300000)と(5, 0)を通ることを仮定する。つまり、$b = b_1 = \dfrac{1500 - \sqrt{2250000 + 6a}}{600}$（下に凸の関数)、$b = b_2 = \dfrac{1500 + \sqrt{2250000 + 6a}}{600}$（上に凸の関数)、$c = 60000\ b$（$b = b_1, b_2$）とし、a をパラメータとする。

図 8 と図 9 は $D(P_{販})$ の概形を示している。a を大きくすると数値例 1 の需要関数に近づく。

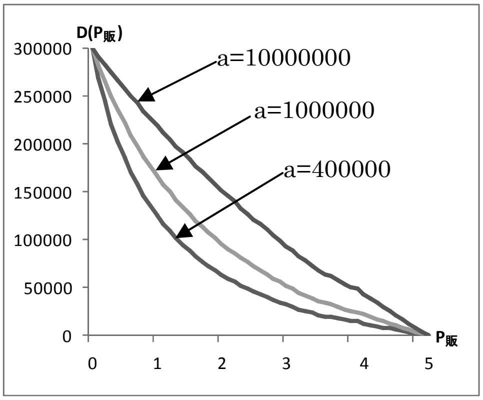

図 8　D($P_{販}$)の概形(b_1 の場合)

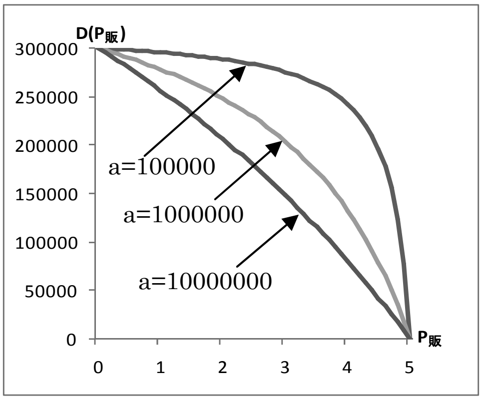

図 9　D($P_{販}$)の概形(b_2 の場合)

表 6 はモデル 3 における計算結果である。

表 6　計算結果(モデル 3)

b	b_1			b_2		
a	400000	1000000	10000000	100000	1000000	10000000
$P_{販}$	3.86	3.88	3.93	4.45	4.13	4.01
$D(P_{販})$	15104.63	24921.70	46894.80	203032.75	120485.32	79863.79
Q^*	10050.00	10050.00	10050.00	12000.00	11000.00	10050.00
$P_{仕}(Q^*)$	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92
$F(P_{販}, Q^*)$	13043.06	22671.86	45892.13	307748.16	143591.91	85251.87

a が小さい場合、b_1 では $P_{販}$ が小さいとき、b_2 では $P_{販}$ が大きいときに、需要が大きく変化する。b_1 では a の増加とともに $P_{販}$ と $D(P_{販})$ が増加する傾向にあり、b_2 では a の増加とともに $P_{販}$ と $D(P_{販})$ が減少する傾向にあるが、a を大きくするほど数値例 1 の結果に近づく。Q^* のほとんどの場合で 10050、つまり、仕入価格が 2.92 になる最小の発注量となった。

6.　数値例 3

本節では、価格弾力性を考慮した需要関数 $D(P_{販})$ を考える。

販売価格を変更することによって、需要量がどれだけ変化するかを表す指標として価格弾力性がある。通常、需要の価格弾力性は、需要量の変化量と価格の変化量の比

で定義される。つまり、販売価格が $D(P_{販0})$ から $D(P_{販1})$ に変化する際の価格弾力性は

$$価格弾力性 = -\frac{\dfrac{D(P_{販1}) - D(P_{販0})}{(D(P_{販1}) + D(P_{販0}))/2}}{\dfrac{P_{販1} - P_{販0}}{(P_{販1} + P_{販0})/2}} \tag{8}$$

である。価格弾力性が 1 より大きいほど、価格の変化に応じて需要量が激しく変化する。

価格弾力性が一定の場合を想定した $D(P_{販}) = e^C P_{販}{}^A$ を基に、点(0, 300000)と(5, 0)を通る関数にするため

$$D(P_{販}) = e^C (P_{販} + s)^A - t \tag{9}$$

とし、さらに $s = 1$ とする。よって、$C = \log(\frac{300000}{1 - 6^A})$、$t = e^C 6^A$ とし、A をパラメータとする。図 10 は $D(P_{販})$ の概形を示している。A を大きくすると数値例 1 の需要関数に近づく。また、$A = -1$ の場合、数値例 2 の $(a, b, c) = (360000, -1, -60000)$ とした需要関数と同じものになる。

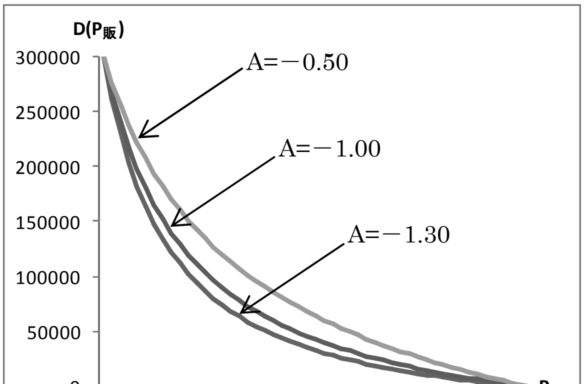

図 10　$D(P_{販})$ の概形

表 7 はモデル 3 における計算結果である。

表 7　計算結果(モデル 3)

A	−1.30	−1.00	−0.50
$P_{販}$	3.84	3.86	3.88
$D(P_{販})$	10426.54	14074.07	22524.87
Q^*	10050.00	10050.00	10050.00
$P_{仕}(Q^*)$	2.92	2.92	2.92
$F(P_{販}, Q^*)$	8483.67	12084.59	20394.75

Aの増加とともに$P_{販}$と$D(P_{販})$が増加する傾向があり、Aが 0 に近づくほど数値例 1 の結果に近づく。数値例 2 と同様に、Q^*は 10050 となった。

7. 考察及び今後の課題

数値例 2 と 3 の結果が示すように、同じ 2 点を通る需要関数でも形が異なると得られる結果は大きく異なる。よって、需要を正確に把握することが重要であるといえる。

仕入価格と販売価格を考慮した EOQ モデルでは、商品の仕入から販売までをコントロールでき、需要関数に基づく販売価格の設定、数量割引を考慮した仕入数量、及び在庫費用のバランスを取ることで全体最適を図った利益が計算できる。しかし、類似品の価格変動があると、自社が扱う商品の需要関数や仕入価格関数に影響を与える。この点に関する考察は今後の課題である。

＜参考文献＞

浅羽茂『企業の経済学』日本経済新聞出版社，2008。

Jagmohan Raju and Z.John Zhang(著)，藤井清美(訳)『スマート・プライシング　利益を生み出す新価格戦略』朝日新聞出版，2011。

勝呂隆男『適切在庫の考え方・求め方』日刊工業新聞社，2011。

高本昇『価格と市場の理論』東洋経済新報社，1968。

久保幹雄『ロジスティクスの数理』共立出版，2007。

Sunil Chopra and Peter Meindl『Supply Chain Management: Strategy, Planningand Operation』Prentice-Hall，2002（李麗萍(訳)『供应链管理：战略，规划与运营』社会科学文献出版，2003)。

柳沢滋『在庫管理のはなし』日科技連，1988。