ロバストポートフォリオ最適化を用いた資産運用モデルの有効性の検証

西 山　皓 城

キーワード: ポートフォリオ、平均・分散モデル、ロバスト最適化

１．はじめに

市場に存在する様々な金融資産の中からどの資産にどれだけ投資するかを決定する問題を、最適化というアプローチから計量的に推し進める方法にポートフォリオ最適化がある。この代表的なモデルは Markowitz(1952)によって提案された平均・分散モデルである。しかし、このモデルを利用したポートフォリオ最適化には問題があるとの指摘も数多く存在する(Broadie(1993)等)。ポートフォリオ最適化では、投資対象となる各々の資産の期待収益率と分散を過去のデータを用いて事前に推定し、その推定値を用いて最適化を行うのであるが、推定値と実現値が乖離することがその原因として挙げられている。各々の資産の期待収益率と分散の推定値がと異なれば最適性や実行可能性の保証を失うこととなる。実際、データが数値誤差と思えるほどの微小な変化をしたとしても、最適解が大きく変動してしまうことがある。このように市場パラメータを精度良く推定する必要があるが、いかなる推定法を用いたとしても必ず推定誤差は存在してしまう。

以上のような問題を取り扱う方法として、ロバスト最適化によるアプローチが注目を集めている。ロバスト最適化は、不確実事象が起こり得る集合をあらかじめ設定し、その中で最悪の場合が起こることを想定して最適化を行う方法であり、Ben-Tal and Nemirovski(1998)によって提案された。ロバスト最適化によるポートフォリオは近年盛んに研究され、その例として、ロバストポートフォリオ最適化の有効性を実証した山本・鴻丸(2010)と山本・石橋(2011)が挙げられる。

本稿では、山本・石橋(2011)のモデルを用いて、投資対象を「国内の証券取引所に上場されている国内株」に限定してロバストポートフォリオ最適化の有効性の検証を

行う。山本・石橋(2011)では、国内債券、国内株式、外国債券、外国株式、短期資産の5つの指標で実証している。しかし、日本証券業協会が平成26年10月に発表した『個人投資家の証券投資に関する意識調査報告書』によると、株式を保有している個人投資家の株式の保有種類は「国内の証券取引所に上場されている国内株」が92.3%を占め、「外国(で)発行(された)証券」が 23.4%、「公社債(国内で発行されたもの)」は 22.7%となっており、外国発行証券や公社債を含めた分析が、国内株式だけに投資する投資家に有益なものになるとは限らないと考えられる。また、対象指標が5つのテストデータの分析を行っており、より多くの銘柄に投資する人にとってはこのモデルが有益であるか判断が難しい。そこで、本稿では国内株式市場のみに焦点を当て、34銘柄を対象に検証を行い、ロバストポートフォリオ最適化の有効性を検証する。

本稿の構成は次の通りである。第2節ではMarkowitzの平均・分散モデルと不確実性を考慮したロバスト最適化モデルについて説明し、第3節ではデータとその性質を説明し、計算結果を示す。そして第4節ではロバストポートフォリオ最適化の有効性について考察を行う。

２．資産運用モデル

本節では、山本・石橋(2011)で扱われている、Markowitz(1952)の平均・分散モデルと不確実性を考慮したロバスト最適化モデルを説明する。

２−１．平均・分散モデル

まずMarkowitz(1952)の平均・分散モデルを説明する。

市場にN個の資産$S_i(i = 1,2,\dots,N)$が存在すると仮定し、資産S_iの収益率を確率変数R_iとする。S_iへのポートフォリオウェイト(投資比率)をx_iとし、ポートフォリオをベクトル$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$として表現する。例えば、資産$S_1$と$S_2$を各々全資金の半分ずつ購入し、残りの資産には一切手をつけない場合、$x = (0.5, 0.5, 0, \dots, 0)^T$と表される。20000円投資する場合であれば、資産S_1に10000円投資し、資産S_2に10000円投資する。本稿では空売りを考慮しない。よってポートフォリオxは$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$と$x_i \geq 0(i = 1,2,\dots,N)$の二つの条件を満たす。そして、ポートフォリオ$x$の収益率は$R(x) = \sum_{i=1}^{N} R_i x_i$と表すことができ、$x$のリターンとリスクの指標である期待収益率$E[R(x)]$と分散$V[R(x)]$は次のように表現することができる。

$$E[R(x)] = E\left[\sum_{i=1}^{N} R_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E[R_i]x_i = \sum_{i=1}^{N} r_i x_i$$

$$V[R(x)] = E[(R(x) - E[R(x)])^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} R_i x_i - \sum_{i=1}^{N} E[R_i]x_i\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E\big[(R_i - E[R_i])\big(R_j - E\big[R_j\big]\big)\big]x_i x_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j$$

ここで、資産S_iの期待収益率$E[R_i]$をr_i、資産S_iとS_jの共分散$E\big[(R_i - E[R_i])\big(R_j - E\big[R_j\big]\big)\big]$を$\sigma_{ij}$としている。

本稿では、直近の過去T期間の収益率に基づいて収益率の平均r_iおよび共分散σ_{ij}を計算する。Tを推定期間とよぶ。このとき、リスク上限σ_T^2の下でリターンを最大にするポートフォリオウェイトxを決定する問題を、平均・分散モデル(P_D)として以下のように定義する。

$$(P_D)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{i=1}^{N} r_i x_i \\ \text{条件} & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \le \sigma_T^2 \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & 0 \le x_i \le u_i, \quad i = 1,2,\dots,N \end{array}\right.$$

u_iは資産S_iのポートフォリオウェイトの上限である。(P_D)は凸二次不等式制約を持つ凸二次計画問題であり、最近のソルバー（ソフトウェア）を用いて効率的に解くことができる。

2-2．ロバスト最適化モデル

2.1 節で紹介した平均・分散モデル(P_D)は、過去のデータから推定した期待収益率と共分散を用いている。市場が安定しているならばそれらの推定値の妥当性は高いと

言えるが、近年の不確実性が高い市場ではその妥当性を保証することは難しい。そこでロバスト最適化の手法を用いることで不確実性に対応することを考える。本稿では、山本・石橋(2011)と同様に、期待収益率情報のみに不確実性を考慮した次の問題を扱う。

$$
(P_R)\quad
\left|
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\min_{r\in U_r}\sum_{i=1}^{N} r_i x_i \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j \le \sigma_T^2 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
& 0 \le x_i \le u_i,\quad i = 1,2,\dots,N
\end{array}
\right.
$$

ここで、U_rは期待収益率ベクトル$r = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$の集合を表しており、不確実性集合と呼ばれている。$(P_R)$は、各ポートフォリオ$x$に対し、$U_r$の中で最悪の期待収益率となることを想定している。つまり、ポートフォリオの期待収益率を保守的に見積もって最適化を行うモデルと言い換えることが出来る。

一般に用いられる不確実性集合U_rとして、Soyster(1973)が提案した矩形とBen-Tal and Nemirovski(1998)が提案した楕円形がある。本稿ではこれらの不確実性集合を適用した2種類のロバスト最適化モデルを考える。

２－２－１．矩形

矩形の不確実性集合は、期待収益率の推定値$\tilde{r}_i$とその許容乖離δ_iを用いて以下のように定義される。

$$U_r = \{\, r \mid |r_i - \tilde{r}_i| \le \delta_i,\ i = 1,2,\dots,N \}$$

これは、各資産の期待収益率r_iが$\tilde{r}_i - \delta_i \le r_i \le \tilde{r}_i + \delta_i$の範囲にあることを意味している。本稿では空売りを考慮しないため、任意のx_iに対する最悪の期待収益率は$\tilde{r}_i - \delta_i$である。よって(P_R)は次のようになる。

$$
(P_{R1}) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (\widetilde{r_i} - \delta_i) x_i \\ \text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \end{array} \right.
$$

(P_D)と同様、(P_{R1})も凸二次不等式制約を持つ凸二次計画問題である。

ここで、期待収益率は正規分布に従うと仮定し、信頼水準を考慮することでδ_iを設定し、これによって不確実性を制御する。すなわち

$$
\delta_i = z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_i}{\sqrt{T}}
$$

とする。ただし、σ_iは資産S_iの標準偏差、Tは推定期間、$z_{\alpha/2}$は標準正規分布における両側確率がα%になる点を示している。次節での分析では、αを 30%、50%、70%と設定した。

ところで、この矩形のロバスト最適化モデルでは、各資産の期待収益率が独立に考慮されているため、全資産の期待収益率がそれぞれ最悪になる、いわば究極の保守的ポートフォリオを作り上げてしまう。次節で扱う楕円形のロバスト最適化モデルでは、資産間の期待収益率の関係が考慮されている。

2－2－2．楕円形

楕円形の不確実性集合は次のように定義される。

$$
U_r = \left\{ r \middle| (r - \tilde{r})^T \sum\nolimits_r^{-1} (r - \tilde{r}) \leq \delta^2 \right\}
$$

ここで、Σ_rは各資産の期待収益率の共分散行列であり、δは不確実性の大きさを表す定数である。矩形では各資産間の相関を考慮していなかったが、楕円形では、そのような極端なケースが避けられている。矩形と同様に、任意のxに対して$\boldsymbol{min}_{r \in U_r} \{\sum_{i=1}^{N} r_i x_i\}$は陽に解くことができ、$(P_R)$は次のようになる。

$$
(P'_{R2}) \quad \left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i x_i - \delta \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^{r} x_i x_j} \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
 & 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1,2,\ldots,N
\end{array}\right.
$$

ここで、σ_{ij}^{r}はΣ_rの第ij要素を表す。つまり、目的関数は、期待収益率の項に不確実性の関数が追加された形となり、δは投資家のリスク回避度を表現していると見ることができる。期待収益率の分布に定常性を仮定した場合、σ_{ij}^{r}は期待収益率の共分散σ_{ij}を用いて以下のように書くことができる。

$$
\sigma_{ij}^{r} = \frac{1}{T}\sigma_{ij}\,, i = 1,2,\ldots,N
$$

よって(P'_{R2})は次のように書き換えることができる。

$$
(P_{R2}) \quad \left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i x_i - \frac{\delta}{\sqrt{T}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j} \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_i x_j \leq \sigma_T^2 \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\
 & 0 \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1,2,\ldots,N
\end{array}\right.
$$

これは二次錐計画問題として定式化することができ、最近のソルバーを用いて解くことができる。ここで、期待収益率の分布に正規性を仮定する。このとき、信頼水準αを設定することによって、δは自由度Nのχ^2分布を利用して求めることができる。

２−３．各モデルの関係

ここで、不確実性を考慮しないモデル(P_D)と、不確実性を考慮したモデル(P_{R1})、(P_{R2})の関係を確認する。まず矩形の不確実性を考慮したモデル(P_{R1})は、(P_D)の目的関数における期待収益率$\widetilde{r_i}$からδ_iを引いている。各資産のリスクと投資家が想定する不確実性に基づいて、期待収益率を保守的に修正して最適化を行っている、と解釈することができる。不確実性の大きさを信頼水準して設定し、すべての資産が最悪な期待収益率となるケースに対応しようという主観的な判断をモデルに組み込むことが実現できている。また、楕円形の不確実性を考慮したモデル(P_{R2})は、(P_D)の目的関数における期待収益率をリスク回避度$(\delta/\sqrt{T})$と投資家の許容するリスク上限σ_T^2に基づいて保守的に修正して最適化を行っていると解釈することができる。

以上より、不確実性を考慮したモデル(P_{R1})、(P_{R2})は、不確実性を考慮しないモデル(P_D)の入力である期待収益率の推定値を、投資家の想定するリスクの許容度あるいは回避度に基づいて修正していると解釈することができ、この意味で(P_D)の拡張モデルであると考えられる。

３．分析結果

本節では、3 つのモデル(P_D)、(P_{R1})、(P_{R2})を実際の日本国内の株式データに適用し、ロバストポートフォリオ最適化の有効性を検証する。

３−１．データとその性質について

資産S_iとして、水産、鉱業等 34 業種から各 1 社、計 34 企業をランダムに選択した。そして、1990 年 1 月から 2014 年 12 月を対象期間として、各企業の月次平均株価を取得した。表 1 は、選択した 34 の企業名と基本情報であり、図 1 は各企業の対象期間におけるリターン平均（%/年）と標準偏差（%/年）をプロットしたものである。表 1 には、2008 年 9 月 15 日に起こったリーマンショックの影響を受け、日経平均株価が歴代上位に入る下落率を記録した 2008 年 10 月のリターンも示した。図 1 以降、表 1 の企業名に付した番号を用いる。例えば 1 はトヨタ自動車を指している。またリスク指標として標準偏差の値を示す。図 1 より、リターン平均は−4%から 14%、標準偏差は 20%から 50%の間で分布していることがわかる。

表１　選択した34社とその企業株価の基本情報

企業名	リターン平均（%/年）	標準偏差（%/年）	08年10月リターン（%/月）	企業名	リターン平均（%/年）	標準偏差（%/年）	08年10月リターン（%/月）
1.トヨタ自動車	8.59	25.96	-14.84	18.日本車輌製造	-0.14	35.12	-42.23
2.日本水産	2.10	33.70	-37.40	19.セイコーホールディングス	3.17	47.23	-25.58
3.日鉄鉱業	-0.11	36.08	-13.89	20.ヤマハ	6.13	36.20	-47.96
4.積水ハウス	2.28	26.05	1.15	21.松屋	7.83	44.07	13.12
5.キリンホールディングス	2.12	24.13	-22.51	22.スルガ銀行	6.93	31.64	-24.67
6.ユニチカ	-0.97	44.60	-24.72	23.野村ホールディングス	2.13	40.33	-31.98
7.大王製紙	3.32	33.38	-16.72	24.オリックス	13.67	42.57	-21.62
8.石原産業	0.76	43.81	-45.00	25.三菱地所	5.83	32.90	-15.07
9.武田薬品工業	5.45	22.28	-8.00	26.小田急電鉄	0.42	20.19	-8.72
10.昭和シェル石油	4.87	33.20	-23.08	27.日本通運	0.32	29.14	-15.95
11.ブリヂストン	8.66	30.34	-13.78	28.日本郵船	0.50	31.32	-30.24
12.旭硝子	-0.45	30.52	-33.84	29.ANAホールディングス	-3.83	26.36	-0.53
13.神戸製鋼所	0.99	35.23	-24.64	30.ケイヒン	-1.34	35.65	-9.22
14.古河電気工業	3.97	46.58	-36.12	31.日本電信電話	0.76	28.40	-16.42
15.石井鐵工所	4.67	51.15	-20.92	32.関西電力	-1.95	24.80	4.26
16.オムロン	8.08	34.33	-13.99	33.東京ガス	0.60	22.63	-3.89
17.川崎重工業	6.28	41.97	-19.72	34.日本工営	2.91	37.22	-12.39

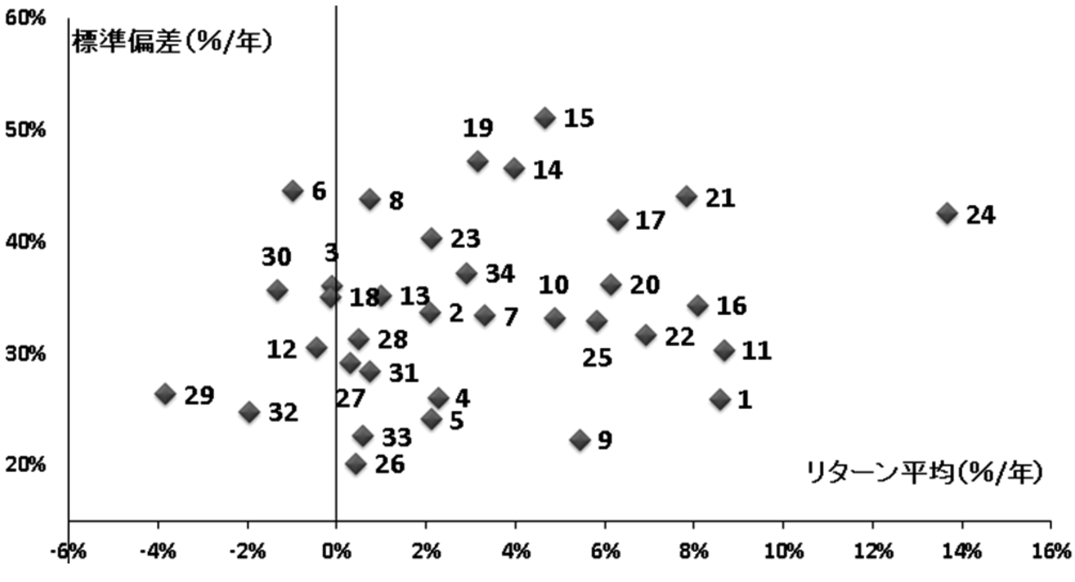

図１　リターン平均と標準偏差の散布図

３−２．分析設定

各資産の期待収益率r_iと資産間の共分散σ_{ij}の推定は、山本・石橋(2011)と同様に、ポートフォリオを構築する月（計算期）から過去 36 か月間（$T = 36$)の観測されたデータをもとに行った。各資産S_iのポートフォリオウェイトの最大値u_iを 50%とした。また、ポートフォリオは毎月組み換え（リバランス）を行うものとし、その回転率の上限Mを 20%とした。すなわち、x_i^0を前月のポートフォリオウェイトとすると、

$$\sum_{i=1}^{N} \left| x_i - x_i^0 \right| \leq M$$

を満たすようにする。これらの制約を与えることで、一つの資産しか保有しないというリスクを回避することができ、またリバランス時に発生する手数料等のコストを抑制することが可能である。不確実性を制御する信頼水準αを 30%、50%、70%と設定した。また、リスク上限σ_T^2については、各モデルで実行可能解が存在するよう年率 50%に設定した。表 2 は以上の設定条件をまとめたものである。

表 2　設定条件

分析期間	1993年2月から21014年12月
推定期間	リバランスを行う時点から過去36か月
回転率上限	20%(月)
リバランス頻度	毎月
各資産への投資ウェイト上限	50%
リスク上限	20%(年)
信頼水準	30%,50%,70%

(P_D)、(P_{R1})、(P_{R2})は、IBM ILOG CPLEX12.6 を用いて解いた。

３−３．パフォーマンス分析

本節では計算結果を示す。まず、2008 年 10 月の各モデルのポートフォリオウェイトを表 3 に示す。ただし、すべてのモデルで$x_i = 0$となったS_i(企業i)は省略しており、空欄は 0 であることを意味している。2008 年 10 月は対象期間の途中であり、リバランスを繰り返して得られた結果であることに注意する。また、2008 年 10 月時点から

直近の過去 36 ヶ月のリターン平均と標準偏差を図 2 に示す。そして、2008 年 10 月の時点で各モデルがどのような資産を保有していたかを図 3 に示す。表 3 より、例えば(P_D)では資産S_{21}とS_{25}（企業 21 と 25）を保有していることがわかる。図 3 は各モデルがどのような資産を 2008 年 10 月に保有していたかを示している。

表 3　2008 年 10 月のポートフォリオウェイト

（単位%）

企業番号		5	7	8	11	16	18	21
Pd								50.00
Pr1	α=30%	30.00						20.00
	α=50%	50.00						
	α=70%	40.00						
Pr2	α=30%	19.77	6.26	2.21	4.16	0.31	6.66	3.00
	α=50%	19.22	5.94	2.30	4.40	1.09	6.46	2.00
	α=70%	18.68	5.65	2.35	4.51	1.80	6.28	2.00

企業番号		22	25	26	28	29	31	32
Pd			50.00					
Pr1	α=30%		30.00	20.00				
	α=50%			40.00	10.00			
	α=70%			40.00				20.00
Pr2	α=30%	5.28		8.85	0.58	15.08	15.75	12.38
	α=50%	5.50		8.36	0.23	15.77	15.79	12.48
	α=70%	5.49		8.26		16.36	15.84	12.58

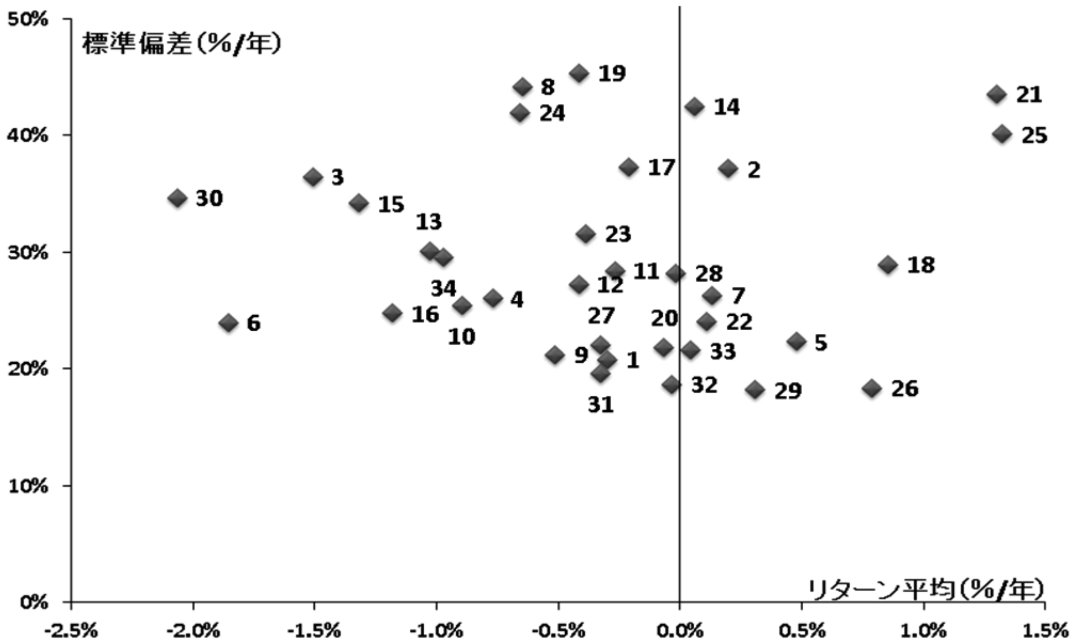

図 2　2008 年 10 月時点から直近の過去 36 ヶ月のリターン平均と標準偏差

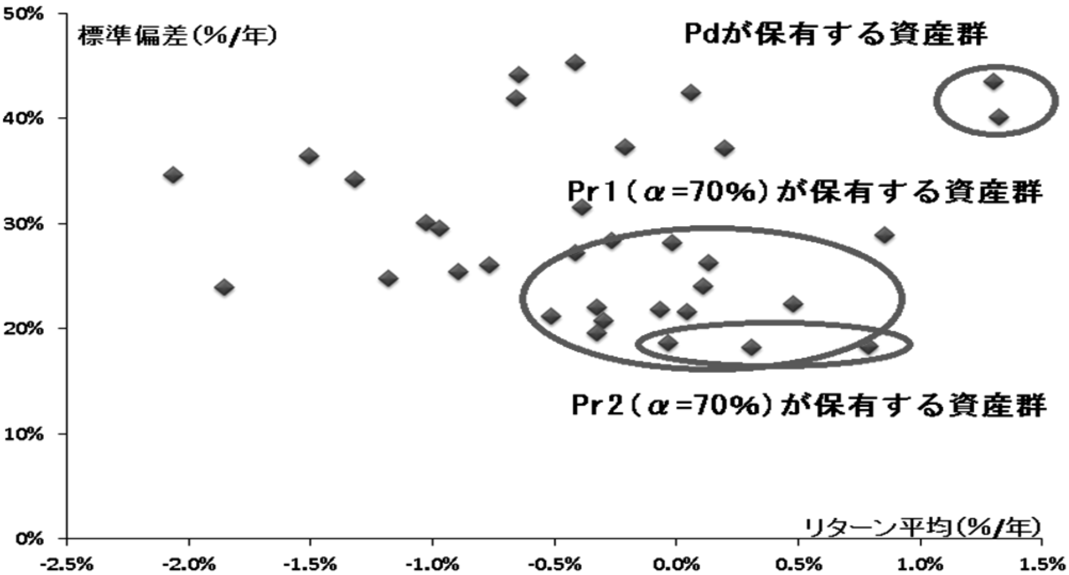

図 3　2008 年 10 月における各モデルの保有資産の内容

表 3 と図 3 より、2008 年 10 月においては、不確実性を考慮したモデルの方が標準偏差の小さい（リスクの小さい）資産を保有しており、保守的なポートフォリオを組んでいることが分かる。

続いて、リーマンショックが起こった 2008 年 9 月以降、ロバスト最適化モデルを適用することによってどの程度損失を抑えることができたのか、またモデルの精度として、理論値（モデルの最適解、すなわち最適ポートフォリオから得られる期待収益率。収益率は直近の過去 36 ヶ月間の観測されたデータ）と実現値（モデルの最適ポートフォリオを計算期で運用して得られる収益率。収益率は計算期の値）がどの程度乖離しているのかを見る。分析期間を 1993 年 2 月～2014 年 12 月とし、各モデルの分析期間全体の実現値のリターン平均、2008 年 10 月のリターン、そして世界景気の先行き不透明感の高まりから世界の株式市場が大きく下落した 2008 年 10 月以降の最小リターンを表 4 に示す。また、各モデルの精度の指標として、理論値と実現値の差を二乗した総和を表 5 に、各モデルの理論値と実現値の推移を図 4～図 6 に示す。

表 4 より、(P_{R1})（α=70%）は 2008 年 10 月以降の最大損失を-13%に抑えることに成功した。しかし、他の信頼水準の場合および(P_{R2})の結果を見ると、不確実性を考慮しても、リーマンショックの損失を抑制することができたと結論を出すことはできない。一方で、表 5 が示すように、不確実性を考慮したモデル(P_{R1})、(P_{R2})の方が精度が高いと言うことができる。

表 4 分析期間のリターン平均、2008 年 10 月のリターン、2008 年以降の最小リターン

実現値		リターン平均(%/月)	08年10月リターン(%/月)	08年以降の最小リターン(%/月)
Pd		5.70	-18.67	-18.67
Pr1	α=30%	5.94	-18.44	-18.44
	α=50%	7.05	-19.92	-19.92
	α=70%	6.70	-13.02	-13.02
Pr2	α=30%	2.67	-19.27	-19.27
	α=50%	2.55	-19.11	-19.11
	α=70%	2.50	-18.93	-18.93

表 5　理論値と実現値の差の二乗の総和

Pd	20.70
Pr1(α=70%)	9.12
Pr2(α=70%)	5.80

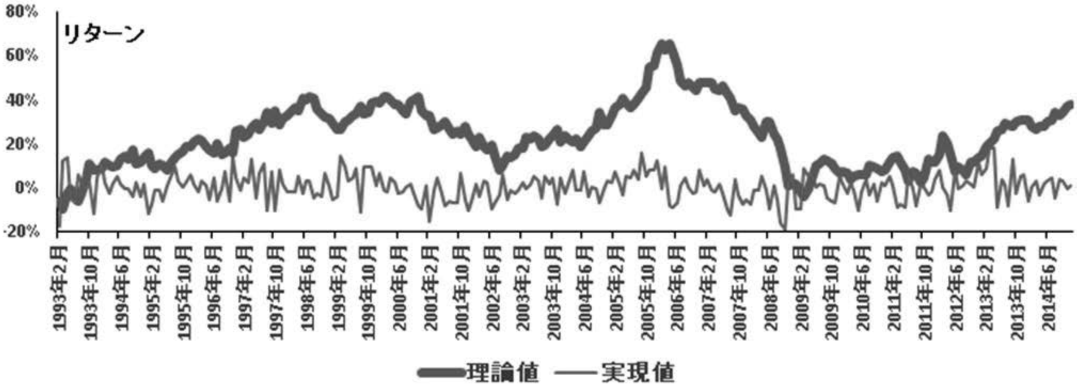

図 4　(P_D)の理論値と実現値の推移

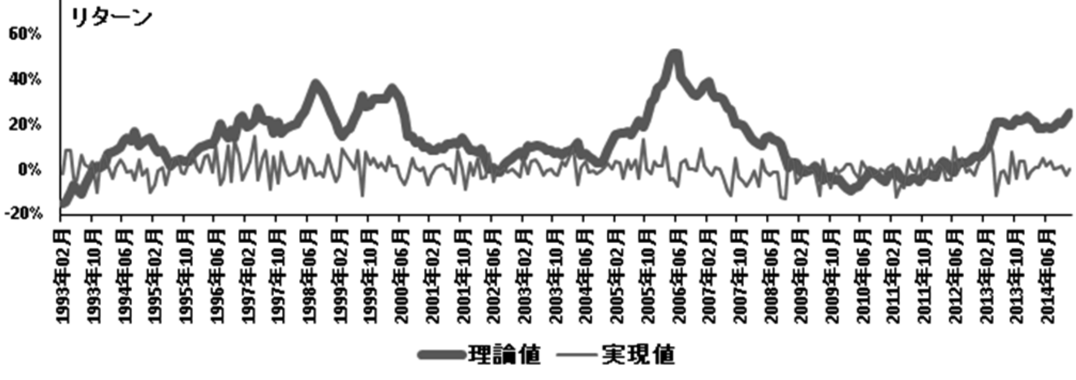

図 5　(P_{R1})（α=70%）の理論値と実現値の推移

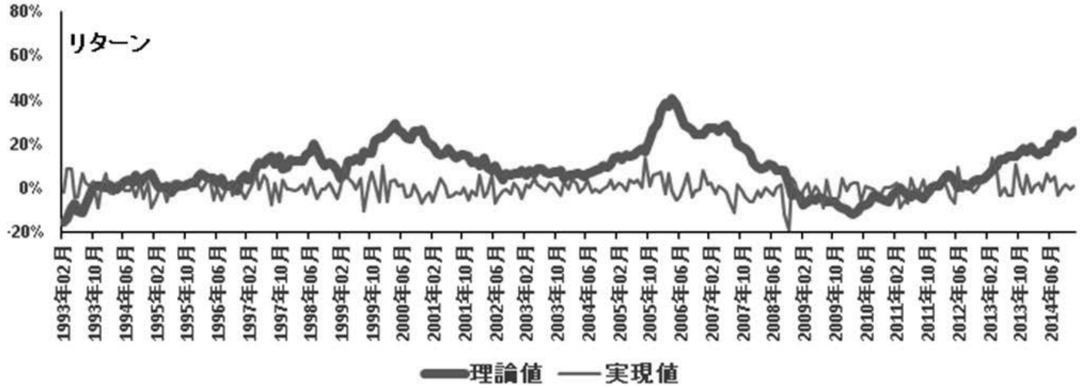

図 6　(P_{R2})（α=70%）の理論値と実現値の推移

以上のように、ランダムに選出した 34 銘柄ではロバストポートフォリオ最適化の有効性を確認することができなかった。一方、この 34 銘柄に国債短期（リターン平均 7.63（年/%）、標準偏差 1.29（年/%））を加えた場合の分析結果を表 6 に示す。表 6 より、国債というリスクの小さい資産を加えたデータに対しては、不確実性を考慮したモデルの方が、2008 年 10 月の損失と、それ以降の最大損失を抑えることができたことがわかる。

表 6　分析期間のリターン平均、2008 年 10 月のリターン、2008 年以降の最小リターン

実現値		リターン平均(%/月)	08年10月リターン(%/月)	08年以降の最小リターン(%/月)
Pd		3.60	-13.71	-15.93
Pr1	α=30%	3.87	-10.41	-10.41
	α=50%	5.56	-10.40	-10.40
	α=70%	4.59	-9.63	-9.63
Pr2	α=30%	2.05	-10.25	-10.25
	α=50%	1.77	-10.13	-10.13
	α=70%	1.71	-10.04	-10.04

4．おわりに

本稿の目的は、対象となる市場を国内株式に絞った場合、ロバストポートフォリオ最適化が有効であるかを実証することであった。山本・石橋(2011)は、ロバストポートフォリオが近年の不確実性の高い市場で損失を抑えながら資産運用が可能であるとしている。特に、リーマンショックが起こった 2008 年 10 月の損失を、不確実性を考慮することで 15%から 25%程度まで抑えることを示している。しかし、国内株式を対

象に検証を行った本稿では、ロバスト最適化が有効であるとの結論を出すことはできなかった。最大損失を山本・石橋(2011)が示した15%から25%程度まで抑えることが出来なかった原因として、扱う資産の性質の違いが考えられる。国内株式の標準偏差は最低でも20%を超えていたため、リスクを回避したポートフォリオの構築を試みたとしても、十分にリスク回避できなかったと考えられる。本稿は、ランダムに選出した34銘柄のデータを用いて、国内株式に対してロバストポートフォリオ最適化が有効であるか実証を行ったが、必ずしも有効になるとは限らないことがわかった。

今後の課題として、ロバストポートフォリオ最適化が有効になる条件を追究することが挙げられる。国債を含めたデータに対してロバストポートフォリオ最適化の有効性を確認することができた（表 6）が、その違いがどこにあるのか解明したいと考えている。

参考文献

[1]Ben-Tal,A. and Nemirovski,A.(1998). Robust Convex Optimization, *Mathematics of Operations Research*, Vol.23, pp.769-805.

[2]Broadie,M.(1993). Computing Efficient Frontiers Using Estimated Parameters, *Annals of Operations Research*, Vol.45, pp.21-58.

[3]Markowitz,H.(1952). Portfolio Selection, *The Journal of Finance,* 7(1), pp.77-91.

[4]Merton,R.C.(1980). On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation, *Journal of Financial Economics*, Vol.8, pp.323-361.

[5]藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎(2011)『Excelで学ぶOR』オーム社。

[6]山本零, 石橋拓弥(2011)「不確実下での資産運用-ロバストポートフォリオ最適化の活用-」『ファイナンシャル・プランニング研究』 No.10, pp.71-79。

[7]山本零, 鴻丸靖弘(2010)「ロバストポートフォリオ最適化の活用-公的年金運用の基本ポートフォリオ構築への応用例-」『証券アナリストジャーナル』 Vol.48(7), pp.64-75。

参考ウェブサイト

[1]個人投資家の証券投資に関する意識調査について

http://www.jsda.or.jp/shiryo/chousa/kojn_isiki.html (2015/01/10 最終閲覧)

[2]Yahoo!ファイナンス

http://finance.yahoo.co.jp/ (2015/01/10 最終閲覧)

[3]日興債券パフォーマンスインデックス

http://www.nikko-fi.co.jp/nindex/data/bond/ (2015/01/22 最終閲覧)